**Continuité des fonctions vectorielles**

Dans tout le chapitre, et sont des -ev normés par et .

Les notions qui vont suivre sont invariantes par passage à une norme équivalente. En particulier elles ne dépendent pas de la norme lorsque les espace sont de dimensions finies.

1. **Limites**

**Convergences**

Définition :

Soient et un point adhérent à . On dit que tend vers en si :

Cet élément est alors unique, et on note ou .

Exemple : ⍟

1. Pour une fonction constante.

Soit . Soit

Soit .

Soit , pour tout , alors

C’est toujours vrai, donc

1. Soit , considérons

Soit

Soit

Posons (on a complété après)

Alors

Donc

Propriété :

Soient , un point adhérent à et à et

Si  et alors .

Démonstration :

Supposons que et

Soit .

Posons , alors

On fait alors une distinction de cas selon si est dans ou car et .

Théorème : (caractérisation séquentielles)

Soient et un point adhérent à . On a équivalence entre

Démonstration :

 : Supposons que

Soit tel que

Soit , comme ,

Or , en exploitant la définition de la convergence avec ,

, donc

Ainsi.

 : par contraposée. Supposons que

et

Propriété :

Soient et Si et , alors .

Propriété :

Soient et Si et , alors

Propriété :

Soient un -evn, et , avec . Si et , alors .

Définition : Les applications scalaires sont appelées **fonctions coordonnées** de relatives à la base

Proposition :

Soit un point adhérent à . On a équivalence entre :

1. tend vers
2. Pour tout tend vers en .

Proposition :

Soit un point adhérent à . On a équivalence entre :

1. tend vers en
2. Pour tout tend vers en

Définition :

Soit avec une partie de non majorée. On dit que tend vers en si

On note alors . On définit de manière analogue pour non minoré.

Définition :

Soit avec une partie de non majorée. On dit que tend vers lorsque tend vers si

On note alors .

Définition :

Soient et un point adhérent à . On dit que tend vers en si

On note alors , et on définit de manière analogue les limites en norme et en .

1. **Continuité**

**Définitions et exemples :**

Définition :

On dit que est **continue** en si , ie si :

Théorème : (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soient et . On a équivalence entre :

1. est continue en

Exemple : Soit définie pour tout

est-elle continue en  ?

On a et

Avec

Donc n’est pas continue en .

Définition :

On dit que est **continue** sur si est continue sur tout point

On note l’ensemble des fonctions continues de dans .

Remarque : Si est continue sur , alors la restriction de à est continue sur , mais la réciproque est **fausse**.

Propriété : Si et un **ouvert** de . Si la restriction de à (notée ) est continue sur , alors est continue en tout point de .

Définition : Une application est dite lipschitzienne s’il existe tel que :

Proposition : Les applications lipschitziennes sont continues.

Démonstration ⍟

Supposons que est lipschitzienne, alors tel que

Soit . Montrons que est continue en .

**Si  :**

Soit . Posons

Alors .

Donc est continue en

**Si ,**

,

Donc , d’où .

Ainsi est constante, donc continue.

Exemple : ⍟

est -lipschtzienne, car

Par l’inégalité triangulaire inversée.

Ainsi est continue sur

**Opérations sur les fonctions continues**

Propriété :

Soient continues et . La fonction est continue sur

Propriété :

Soient et continues sur . Le produit est continu sur .

Propriété :

Soient et vérifiant . Si et sont continues, alors la composée l’est également.

Exemple : On appelle fonction monôme sur toute application

Où

Comme les projections coordonnées sont continues sur , par produit, une fonction monôme est continue sur

On appelle fonction polynômiale sur toute combinaison sur linéaire finie de fonctions monômes sur . Par les propriétés précédentes, les fonctions polynômiales sont continues sur .

**Fonctions à valeurs dans un evn de dimension finie ou un evn produit**

Propriété :

Si est de dimension finie, alors est continue si et seulement si ses fonctions coordonnées dans une base de le sont.

Propriété :

Soit un espace normée produit, et . On peut noter avec pour tout . La fonction est continue sur si et seulement si toutes ses composantes le sont.

1. **Continuité et topologie**

**Autres caractérisations équivalentes de la continuité**

Théorème :

Soit . On a équivalence entre :

1. est continue sur
2. L’image réciproque par de tout fermé de est un fermé de
3. L’image réciproque par de tout ouvert de est un ouvert de

**Continuité et compacité**

Théorème : Soient un compact et une application continue. Alors est un compact de .

En d’autres termes, l’image d’une partie compacte par une application continue est une partie compacte.

Corollaire : Soit . Si est une partie compacte de et continue, alors est bornée.

Théorème : Soit continue où est un compacte non vide de . Alors est bornée et elle atteint ses bornes (elle admet un minimum et un maximum).

1. **Continuité des applications linéaires**

Théorème :

Soit une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. est continue
2. est continue en
3. est bornée sur la boule unité fermée
4. est bornée sur la sphère unité
5. est lipschitzienne

Théorème :

Si est de dimension finie, toute application linéaire de dans est continue.

Remarque : c’est seulement l’espace de départ qui doit être de dimension finie.